JRK896

التمرين الأول (نقطتان) :

0.5 | 1) أ) حل في المجموعة $\mathbb{R}$ المعادلة : $e^{2x}-4e^{x}+3=0$

0.5 | ب) حل في المجموعة $\mathbb{R}$ المتراجحة : $e^{2x}-4e^{x}+3\leq 0$

0.5 | ج) احسب النهاية : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-4e^{x}+3}{e^{2x}-1}$

0.5 | 2) بين أن المعادلة $e^{2x}+e^{x}+4x=0$ تقبل حلا على المجال $[-1,0]$

التمرين الثاني (4 نقط):

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة كما يلي : $u_0=\dfrac{1}{2}$ و $u_{n+1}=\dfrac{u_n}{3-2u_n}$ لكل n من $I\!N$

0.25 | 1) احسب u_1

0.5 | 2) بين بالترجع أن لكل n من $I\!N$ ، $0<u_n\leq\dfrac{1}{2}$

0.5 | 3) أ) بين أن لكل n من $I\!N$ ، $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\leq\dfrac{1}{2}$

0.5 | ب) استنتج رتابة المتتالية (u_n)

0.75 | 4) أ) بين أن لكل n من $I\!N$ ، $0<u_n\leq\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}$ ، ثم احسب نهاية المتتالية (u_n)

0.5 | ب) نضع $v_n=\ln(3-2u_n)$ لكل n من $I\!N$ ، احسب $\lim v_n$

0.5 | 5) أ) تحقق من أن لكل n من $I\!N$ ، $\dfrac{1}{u_{n+1}}-1=3\left(\dfrac{1}{u_n}-1\right)$

0.5 | ب) استنتج u_n بدلالة n لكل n من $I\!N$

التمرين الثالث (5 نقط) :

0.75 | 1) حل في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-\sqrt{3}z+1=0$

2) نعتبر العددين العقديين $a=e^{i\frac{\pi}{6}}$ و $b=\dfrac{3}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

0.25 | أ) اكتب العدد a على الشكل الجبري .

0.5 | ب) تحقق أن $\overline{a}b=\sqrt{3}$

في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$، نعتبر النقط A و B و C التي ألحاقها على التوالي هي a و b و $\overline{a}$

0.5 | 3) بين أن النقطة B هي صورة النقطة A بتحاك h مركزه O يتم تحديد نسبته.

4) ليكن z لحق نقطة M من المستوى و z' لحق النقطة M' صورة النقطة M بالدوران R الذي مركزه A و زاويته $\dfrac{\pi}{2}$

0.5 | أ) اكتب z' بدلالة z و a

0.25 | ب) ليكن d لحق النقطة D صورة النقطة C بالدوران R ، بين أن $d=a+1$

0.5 | ج) لتكن I النقطة التي لحقها العدد 1 ، بين أن $ADIO$ معين .

0.75 | 5) أ) تحقق من أن $d-b=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}(1-i)$ و استنتج عمدة للعدد $d-b$

ب) اكتب العدد $b-1$ على الشكل المثلثي .	0.5
ج) استنتج قياسا للزاوية $\left(\widehat{\overline{BI},\overline{BD}}\right)$	0.5

المسألة (9 نقط):

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $[0,+\infty[$ بما يلي : $f(0)=0$ و $f(x)=2x\ln x-2x$ إذا كان $x>0$

و (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ (الوحدة : $1cm$)

1) بين أن الدالة f متصلة على اليمين في النقطة 0	0.5
2) أ) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$	0.5
ب) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ ثم أول النتيجة هندسيا .	0.5
3) أ) احسب $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x}$ ثم أول النتيجة هندسيا .	0.75
ب) احسب $f'(x)$ لكل x من المجال $]0,+\infty[$	0.5
ج) ضع جدول تغيرات الدالة f على $[0,+\infty[$	0.5
4) أ) حل في المجال $]0,+\infty[$ المعادلتين $f(x)=0$ و $f(x)=x$	0.5
ب) أنشئ المنحنى (C) في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ (نأخذ: $e^{\frac{3}{2}}=4.5$)	1
5) أ) باستعمال مكاملة بالأجزاء، بين أن : $\int_1^e x\ln x\,dx=\frac{1+e^2}{4}$	0.5
ب) استنتج : $\int_1^e f(x)dx$	0.5
6) أ) حدد القيمة الدنيا للدالة f على المجال $]0,+\infty[$	0.25
ب) استنتج أن لكل x من المجال $]0,+\infty[$ ، $\ln x\geq\frac{x-1}{x}$	0.5
7) ليكن g قصور الدالة f على المجال $[1,+\infty[$	
أ) بين أن الدالة g تقبل دالة عكسية g^{-1} معرفة على مجال J يتم تحديده .	0.5
ب) أنشئ في نفس المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ المنحنى الممثل للدالة g^{-1}	0.75
8) نعتبر الدالة العددية h المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $\begin{cases} h(x)=x^3+3x & ;\ x\leq0 \\ h(x)=2x\ln x-2x & ;\ x>0 \end{cases}$	
أ) ادرس اتصال الدالة h في النقطة 0	0.5
ب) ادرس قابلية اشتقاق الدالة h على اليسار في 0 و أول النتيجة هندسيا .	0.5
ج) هل الدالة h قابلة للاشتقاق في 0 ؟ علل جوابك.	0.25

تصحيح الامتحان الوطني 2020 - 2021

- الدورة العادية -

ع

التمرين الأول:

1- أ) نحل في IR :

$$e^{2x} - 4e^x + 3 = 0$$

نضع: $t = e^x$ اذن: $t^2 = e^{2x}$

ومنه:

$$t^2 - 4t + 3 = 0$$

و $\Delta = 16 - 4(3) = 16-12 = 4 > 0$

حلان:

$$t_1 = \frac{4-2}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$t_2 = \frac{4+2}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

اذن:

$t = t_1$ أو $t = t_2$

$e^x = 1$ أو $e^x = 3$

$x = \ln(1) = 0$ أو $x = \ln(3)$

مجموعة الحلول هي:

$$S = \{0 ; \ln(3)\}$$

2- ب) نحل في IR المتراجحة:

$$e^{2x} - 4e^x + 3 \leq 0$$

حسب ماسبق:

$$e^{2x} - 4e^x + 3 = (e^x - 1)(e^x - 3)$$

ولدينا:

$e^x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \ln(1) = 0$

$e^x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \ln(3)$

اذن:

x		0		$\ln(3)$	
$e^x - 1$	$-$	0	$+$		$+$
$e^x - 3$	$-$		$-$	0	$+$
$e^{2x} - 4e^x + 3$	$+$	0	$-$	0	$+$

(−)

اذن مجموعة الحلول هي المجال: $[0 ; \ln(3)]$

1- ج) حساب $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{2x} - 4e^x + 3}{e^{2x} - 1}$

مباشرة نجد "$\frac{1-4+3}{1-1}$" = "$\frac{0}{0}$" ش.غ.م

لدينا: $e^{2x} - 1 = (e^x)^2 - 1^2 = (e^x - 1)(e^x + 1)$

و $e^{2x} - 4e^x + 3 = t^2 - 4t + 3 \quad (t = e^x)$

$$= (t-1)(t-3)$$

$$= (e^x - 1)(e^x - 3)$$

اذن:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{2x} - 4e^x + 3}{e^{2x} - 1} = \lim_{x \to 0} \frac{(e^x - 1)(e^x - 3)}{(e^x - 1)(e^x + 1)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 3}{e^x + 1} = \frac{1-3}{1+1} = \frac{-2}{2} = \boxed{-1}$$

2) $e^{2x} + e^x + 4x = 0$

$x \in [-1 ; 0]$

الدالة $f : x \mapsto e^{2x} + e^x + 4x$

متصلة على المجال $[-1 ; 0]$

ولدينا: $f(0) = 1 + 1 + 0 = 2 > 0$

$$f(-1) = e^{-2} + e^{-1} - 4$$

$$= \frac{1}{e^2} + \frac{1}{e} - 4$$

نعلم أن: $e \simeq 2,7 > 1$ ومنه $e^2 > 1$

اذن: $\frac{1}{e^2} + \frac{1}{e} < 1 + 1 = 2$

$$\Rightarrow \frac{1}{e^2} + \frac{1}{e} - 4 < 2 - 4 = -2$$

اذن: $f(-1) < 0$

(ملاحظة: يمكن استعمال الآلة الحاسبة)

اذن: $f(-1) \times f(0) < 0$

اذن حسب مبرهنة القيم الوسيطية المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا في المجال $[-1 ; 0]$.

التمرين الثاني:

$u_0 = \frac{1}{2}$

$(\forall n \in \mathbb{N}) ; \quad u_{n+1} = \frac{u_n}{3-2u_n}$

1) $u_1 = \frac{u_0}{3-2u_0} = \frac{\frac{1}{2}}{3-\frac{2}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{2}$

$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \boxed{\frac{1}{4}}$

2) من أجل $n=0$ لدينا: $0 < u_0 \le \frac{1}{2} \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{2} \le \frac{1}{2}$

وهذا صحيح.

ليكن $n \ge 0$

نفترض أن: $0 < u_n \le \frac{1}{2}$

ونبين أن: $0 < u_{n+1} \le \frac{1}{2}$

بما أن: $u_n \le \frac{1}{2}$ فإن: $2u_n \le 1$

إذا: $-2u_n \ge -1$

$\Rightarrow 3 - 2u_n \ge 3 - 1 = 2$

إذن:

$\left(3-2u_n > 0 \quad \text{و} \quad \frac{1}{3-2u_n} \le \frac{1}{2}\right)$

$\Rightarrow 0 < \frac{1}{3-2u_n}$ و $\frac{u_n}{3-2u_n} \le \frac{u_n}{2}$

(لأن: $u_n > 0$)

$\Rightarrow 0 < \frac{u_n}{3-2u_n}$ و $\frac{u_n}{3-2u_n} \le \frac{1}{2}$

(لأن: $\frac{u_n}{2} = \frac{1}{2} \times u_n \le \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \le \frac{1}{4} \le \frac{1}{2}$)

وبالتالي: $0 < u_{n+1} \le \frac{1}{2}$

العبارة صحيحة من أجل $(n+1)$ وحسب مبدأ التراجع:

$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 0 < u_n \le \frac{1}{2}$

2

طريقة أخرى:

$\frac{1}{u_{n+1}} = \frac{3-2u_n}{u_n} = \frac{3}{u_n} - \frac{2u_n}{u_n} = \frac{3}{u_n} - 2$

نعلم أن: $0 < u_n \le \frac{1}{2}$ إذا: $\frac{1}{u_n} \ge 2$

ومنه: $\frac{3}{u_n} \ge 6$ إذا: $\frac{3}{u_n} - 2 \ge 4$

وبالتالي:

$\frac{1}{u_{n+1}} > 0$ و $\frac{1}{u_{n+1}} \ge 2$

(لأن $4 \ge 2$)

أي أن: $0 < u_{n+1}$ و $u_{n+1} \le \frac{1}{2}$

ومنه: $\boxed{0 < u_{n+1} \le \frac{1}{2}}$

ملاحظة: ينبغي أن نبرهن على أن:

$0 < u_{n+1}$ و $u_{n+1} \le \frac{1}{2}$

لا ينبغي نسيان إحدى المتفاوتتين.

3-أ) نبين أن: $(\forall n \in \mathbb{N}), \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \le \frac{1}{2}$

طريقة رقم 1:

نستعمل البرهان بالتكافؤ:

ليكن n من $\mathbb{N}$.

العبارة:

$\frac{u_{n+1}}{u_n} \le \frac{1}{2} \Leftrightarrow u_{n+1} \le \frac{u_n}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{u_n}{3-2u_n} \le \frac{u_n}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{3-2u_n} \le \frac{1}{2}$ (لأن: $u_n > 0$)

$\Leftrightarrow 2 \le 3 - 2u_n$ (لأن $3-2u_n > 0$ و $u_n \le \frac{1}{2}$)

$\Leftrightarrow -1 \le -2u_n$

$\Leftrightarrow 1 \ge 2u_n \Leftrightarrow \frac{1}{2} \ge u_n$

وهذا صحيح لأن: $0 < u_n \le \frac{1}{2}$

وبالتالي العبارة: $\frac{u_{n+1}}{u_n} \le \frac{1}{2}$ صحيحة لكل n.

طريقة 2: ليكن n من $\mathbb{N}$. لدينا:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{1}{2} = \frac{1}{u_n}\left(\frac{u_n}{3-2u_n}\right) - \frac{1}{2} = \frac{1}{3-2u_n} - \frac{1}{2} = \frac{-1+2u_n}{2(3-2u_n)}$$

نعلم أن: $u_n \leq \frac{1}{2}$ اذن: $\begin{cases} 3-2u_n \geq 0 \\ -1+2u_n \leq 0 \end{cases}$

ومنه: $\frac{-1+2u}{2(3-2u_n)} \leq 0$

وبالتالي: $(\forall n\in\mathbb{N}).\ \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{1}{2}$

3-ب) استنتاج الرتابة: ليكن $n\in\mathbb{N}$

نعلم مما سبق أن: $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{1}{2}$

اذن: $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$ (لأن: $\frac{1}{2} \leq 1$)

وبالتالي: $(\forall n\in\mathbb{N}),\ u_{n+1} \leq u_n$

ومنه (u_n) تناقصية.

4-أ) نبين أن: $0 < u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

طريقة 1:

باستخدام السؤال 3-أ):

نعلم أن: $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{1}{2}$ لكل عدد صحيح n.

اذن العبارة صحيحة بالخصوص من أجل: 0 ; 1 ; 2 ; ...... n أي أن:

$\frac{u_1}{u_0} \leq \frac{1}{2}$ و $\frac{u_2}{u_1} \leq \frac{1}{2}$ و $\frac{u_3}{u_2} \leq \frac{1}{2}$ و ... و $\frac{u_n}{u_{n-1}} \leq \frac{1}{2}$

عدد الأسطر هو: $(n-1)+1 = n$

نضرب هذه المتفاوتات طرفا بطرف فنحصل على الجداء:

$$\frac{u_1}{u_0} \times \frac{u_2}{u_1} \times \frac{u_3}{u_2} \times \dots \times \frac{u_n}{u_{n-1}} \leq \underbrace{\frac{1}{2}\times\dots\times\frac{1}{2}}_{n \text{ من العوامل}}$$

اذن: $\frac{u_n}{u_0} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$\Rightarrow u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n u_0 = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ (لأن: $u_0 = \frac{1}{2}$)

وبالتالي $(\forall n\in\mathbb{N}): 0 < u_n < \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

طريقة 2:

العبارة $0 < u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ صحيحة

من أجل $n=0$ لأن:

$0 < u_0 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{0+1} \iff 0 < \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}$

وهذا صحيح.

ليكن $n\in\mathbb{N}$:

نفترض أن: $0 < u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$

نعلم أن: $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{1}{2}$

اذن:

$$\Rightarrow u_{n+1} \leq \frac{1}{2} u_n \leq \frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}$$

(حسب ف الترجع)

اذن حسب مبدأ الترجع: $(\forall n\in\mathbb{N}),\ 0 < u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$

حساب $\lim u_n$:

نعلم أن $(\forall n\in\mathbb{N});\ 0 < u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$

وبما أن: $-1 < \frac{1}{2} < 1$ فإن: $\lim \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

اذن: $\lim u_n = 0$

4-ب) $\forall n\in\mathbb{N};\ v_n = \ln(3-2u_n)$

نعلم أن: $\lim u_n = 0$ إذا:

$\lim 3-2u_n = 3-0 = 3$

وبما أن: ln دالة متصلة فإن:

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} \ln(3-2u_n) = \ln(3)$$

5-أ) التحقق:

ليكن n من $\mathbb{N}$ لدينا:

$$\frac{1}{u_{n+1}} - 1 = \frac{3-2u_n}{u_n} - 1 = \frac{3-2u_n-u_n}{u_n} = \frac{3-3u_n}{u_n} = 3\left(\frac{1-u_n}{u_n}\right) = 3\left(\frac{1}{u_n}-1\right)$$

5-ب) استنتاج u_n بدلالة n:

نضع: $w_n = \frac{1}{u_n} - 1$

حسب 5-أ) لدينا:

$w_{n+1} = 3w_n$

إذا: (w_n) هندسية أساسها 3 وحدها:

$\forall n\in\mathbb{N};\ w_n = 3^n w_0 = 3^n\left(\frac{1}{u_0}-1\right)$

$w_n = 3^n(2-1) = 3^n$

وبالتالي:

$\frac{1}{u_n}-1 = 3^n$

$\Rightarrow \frac{1}{u_n} = 1+3^n \Rightarrow u_n = \frac{1}{1+3^n}$

وبالتالي: $(\forall n\in\mathbb{N}): u_n = \frac{1}{1+3^n}$

4

التمرين الثالث:

1) $z^2 - \sqrt{3}z + 1 = 0$

$\Delta = 3-4 = -1 < 0$

حلان عقديان مترافقان:

$z_1 = \frac{\sqrt{3} - i\sqrt{1}}{2} = \frac{\sqrt{3} - i}{2}$

$z_2 = \overline{z_1} = \frac{\sqrt{3}+i}{2}$

مجموعة الحلول هي: $S=\{z_1 ; z_2\}$

2) $b = \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $a = e^{i\frac{\pi}{6}}$

2-أ) $a = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$

إذا: $a = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$

2-ب) التحقق:

$$\bar{a}b = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}\right)\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)$$

$$= \sqrt{3}\,\bar{a}a = \sqrt{3}|a|^2 = \sqrt{3}\times 1 = \sqrt{3}$$

(لأن: $|a| = |e^{i\frac{\pi}{6}}| = 1$)

ملاحظة: يمكن الحساب عن طريق النشر المعتاد ونجد $\sqrt{3}$.
أو نلاحظ من البداية أن: $b = \sqrt{3}a$
إذا: $\bar{a}b = \bar{a}\sqrt{3}a = \sqrt{3}\bar{a}a = \sqrt{3}$

3) تحديد k نسبة التحاكي h.

نعلم أن صيغة التحاكي h هي:

$z' - z_\Omega = k(z - z_\Omega)$

بما أن: $h(A)=B$ فإن:

$z_B = k z_A$

إذا: $b = ka$

$b\bar{a} = ka\bar{a}$.

ومنه :

ونعلم أن : $b\bar{a} = \sqrt{3}$ و $a\bar{a} = |a|^2 = 1$

اذن : $\sqrt{3} = k \times 1$ ومنه $\boxed{k = \sqrt{3}}$

بما أن $k \in \mathbb{R}$ فإنه يوجد تحاكٍ

h مركزه O و يحول A إلى B ونسبته $\sqrt{3}$.

4-أ) R دوران مركزه A و زاويته $\frac{\pi}{2}$.

أذن : $z' - z_A = e^{i\pi/2}(z - z_A)$

ومنه : $\boxed{z' = a + e^{i\pi/2}(z - a)}$

4-ب) D هي صورة c بالدوران R

اذن :

$d = a + e^{i\frac{\pi}{2}}(\bar{a} - a)$

$= a + i\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2} - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right)\right)$

$= a + i\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right)$

$= a + i\left(-i\frac{2}{2}\right) = a + i(-i) = a + 1$

اذن : $\boxed{d = a + 1}$

4-ج)

A(a) D(a+1) I(1) O(0)

لدينا :

$aff(\overrightarrow{AD}) = a + 1 - a = \boxed{1}$

$aff(\overrightarrow{OI}) = 1 - 0 = \boxed{1}$

اذن : $\boxed{\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OI}}$

و بالتالي ADIO متوازي أضلاع

وله ضلعان متتابعان متقايسان هما

[AD] و [DI] لأن :

$AD = |d - a| = |a + 1 - a| = 1$

5

و $DI = |1 - (a+1)| = |-a| = |a| = 1$

اذن فهو معين .

5-أ) التحقق :

لدينا :

$d - b = 1 + a - b$

$= 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} - \frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$= \frac{2 + \sqrt{3} - 3}{2} + i\frac{(1 - \sqrt{3})}{2}$

$= \frac{\sqrt{3} - 1}{2} - i\frac{(\sqrt{3} - 1)}{2}$

$= \frac{\sqrt{3} - 1}{2}(1 - i)$

استنتاج : $\arg(d - b)$

حسب ماسبق لدينا :

$\arg(d - b) \equiv \arg\left(\frac{\sqrt{3} - 1}{2}(1 - i)\right) [2\pi]$

$\equiv \arg\left(\frac{\sqrt{3} - 1}{2}\right) + \arg(1 - i) \quad [2\pi]$

بما أن : $\frac{\sqrt{3} - 1}{2} > 0$ فإن : $\arg\left(\frac{\sqrt{3} - 1}{2}\right) = 0 [2\pi]$

ولدينا : $|1 - i| = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$

اذن : $1 - i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$= \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left[\sqrt{2} ; -\frac{\pi}{4}\right]$

اذن : $\arg(1 - i) \equiv -\frac{\pi}{4} [2\pi]$

وبالتالي :

$\boxed{\arg(d - b) \equiv -\frac{\pi}{4} [2\pi]}$

5-ب) الشكل المثلثي للعدد : $1 - b$:

$1 - b = 1 - \frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$= (-1) \times \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$= [1 ; \pi] \times \left[1 ; \frac{\pi}{3}\right] = \left[1 \times 1 ; \pi + \frac{\pi}{3}\right]$

اذن : $1 - b = \left[1 ; \frac{4\pi}{3}\right]$

6

5-ج) استنتاج قياس $(\overrightarrow{BI},\overrightarrow{BD})$ ،

نعلم أن: $(\overrightarrow{BI};\overrightarrow{BD}) \equiv \arg\left(\frac{d-b}{1-b}\right)$

اذن: $(\overrightarrow{BI},\overrightarrow{BD}) \equiv \arg(d-b) - \arg(1-b)\ [2\pi]$

$\equiv -\frac{\pi}{4} - \left(\frac{4\pi}{3}\right)\ [2\pi]$

لأن: $\arg(1-b) \equiv \frac{4\pi}{3}\ [2\pi]$ سؤال 5-ب)

و $\arg(d-b) = -\frac{\pi}{4}$ حساب 5-أ)

اذن: $(\overrightarrow{BI};\overrightarrow{BD}) \equiv -\frac{19\pi}{12}\ [2\pi]$

ملاحظة: لدينا: $-\frac{19\pi}{12} + 2\pi = \frac{5\pi}{12}$

اذن: $(\overrightarrow{BI};\overrightarrow{BD}) \equiv \frac{5\pi}{12}\ [2\pi]$

هي أيضا إجابة صحيحة.

المسألة:

$$\begin{cases} f(x) = 2x\ln(x) - 2x \ ; \ x>0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1) اتصال f في 0 على اليمين،

لدينا: $f(0)=0$

نعلم أن: $\lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0$ اذن:

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0 - 2\times 0 = 0 = f(0)$

ومنه f متصلة في 0 على اليمين،

2-أ) حساب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

لدينا: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x\left(2\ln(x) - 2\right)$

$= +\infty \times (+\infty) = \boxed{+\infty}$

(لأن $\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$)

2-ب) $\frac{f(x)}{x} = 2\ln(x) - 2$

لدينا: $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$

تأويل هندسي:

(C) يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأراتيب.

3-أ) حساب $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x}$

لدينا: $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0^+} 2\ln(x) - 2$

$= \boxed{-\infty}$

لأن: $\lim_{x\to -\infty} \ln(x) = -\infty$

تأويل هندسي:

لدينا: $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{f(x)}{x}$

اذن: $\lim_{\substack{x\to 0 \\ >}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = -\infty$

ومنه (C_f) يقبل نصف مماس موجه نحو الأسفل ↓ في النقطة ذات الأفصول $x_0=0$ (أصل المعلم).

3-ب) f ق.ش على $]0,+\infty[$

ولدينا، $(\forall x>0)$; $f'(x) = \left(2x\ln(x) - 2x\right)'$

$= (2x)'\ln(x) + 2x\ln'(x) - (2x)'$

$= 2\ln(x) + 2x \times \frac{1}{x} - 2$

$= 2\ln(x)$

اذن: $(\forall x>0)$; $f'(x) = 2\ln(x)$

3-ج) جدول تغيرات f:

7

ملاحظة: $x=e$ (p_1) هو حل المعادلة $f(x)=0$ أي أن $(\mathscr{C})$ يقطع (Ox) في $x=e$

(p_2) $x=e^{3/2}$ هو حل المعادلة $f(x)=x$

يعني أن: $f(e^{3/2})=e^{3/2}$

حيث: $e^{3/2}\simeq 4{,}5$

(p_3) $f'(1)=0$ إذن $(\mathscr{C})$ يقبل مماسا أفقيا في النقطة: $A(1;-2)$

$(f(1)=-2$ لأن$)$

5 - أ) حساب: $\int_1^e x\ln(x)\,dx$

بالإجراء ثمّ:

$$\begin{cases} u(x)=\ln(x) \\ v'(x)=x \end{cases} : \begin{cases} u'(x)=\frac{1}{x} \\ v(x)=\frac{x^2}{2} \end{cases}$$

إذن:

$$\int_1^e x\ln(x)\,dx=\left[\frac{x^2}{2}\ln(x)\right]_1^e-\int_1^e\frac{1}{x}\frac{x^2}{2}\,dx$$

$$=\frac{e^2\ln(e)}{2}-\frac{1}{2}\ln(1)-\int_1^e\frac{x}{2}\,dx$$

$$=\frac{e^2}{2}-\left[\frac{x^2}{4}\right]_1^e=\frac{e^2}{2}-\left(\frac{e^2}{4}-\frac{1}{4}\right)$$

$$=\frac{e^2}{2}-\frac{e^2}{4}+\frac{1}{4}=\frac{2e^2-e^2}{4}+\frac{1}{4}$$

$$=\frac{e^2}{4}+\frac{1}{4}$$

إذن:

$$\boxed{\int_1^e x\ln(x)\,dx=\frac{1+e^2}{4}}$$

5 - ب) استنتاج: $\int_1^e f(x)\,dx$

لدينا:

$$\int_1^e f(x)\,dx=\int_1^e 2x\ln(x)-2x\,dx$$

$$=2\int_1^e x\ln(x)\,dx-\int_1^e 2x\,dx$$

$$=2\left(\frac{1+e^2}{4}\right)-\left[x^2\right]_1^e \quad (\text{محاسبة نعوض})$$

$$=\frac{1+e^2}{2}-(e^2-1)=\frac{1+e^2}{2}-\frac{2e^2-2}{2}$$

$$=\boxed{\frac{3-e^2}{2}}$$

لدينا: $f'(x)=2\ln(x)$

و $\ln(x)\geq 0 \iff x\geq 1$

إذن:

x	0		1		
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
f	0	↘	-2	↗	$+\infty$

4 - أ) ليكن $x\in]0,+\infty[$ لدينا:

$$f(x)=0 \iff 2x\ln(x)=2x$$

$$\iff \ln(x)=1 \iff x=e$$

إذن حل المعادلة $f(x)=0$

هو: $\boxed{x=e}$

حل المعادلة: $f(x)=x$

$$f(x)=x \iff 2x\ln(x)-2x=x$$

$$\iff 2x\ln(x)=3x \iff \ln(x)=\frac{3}{2}$$

الحل هو: $\boxed{x=e^{3/2}}$

4 - ب) انشاء $(\mathscr{C})$:

8

8) $\begin{cases} h(x) = x^3+3x \ ; \ x \leq 0 \\ h(x) = 2x\ln(x) - 2x \ ; \ x > 0 \end{cases}$

8أ) لدينا:
$$\lim_{x \to 0^<} h(x) = \lim x^3+3x = 0 = h(0)$$

اذا: **h متصلة في 0 على اليسار**

ولدينا:
$$\lim_{x \to 0^>} h(x) = \lim_{x\to 0^>} 2x\ln(x) - 2x = 0 = h(0)$$

اذا: **h متصلة على اليمين في 0**

بما أن h متصلة على اليمين وعلى اليسار في 0 فإنها **متصلة في 0**.

8-ب) قابلية الاشتقاق في 0 على اليسار.

لدينا: $\forall x \leq 0 : \ h(x) = x^3+3x$

$x \mapsto x^3+3x$ دالة حدودية.

اذا فهي ق.ش على $\mathbb{R}$

وبالخصوص في 0 على اليسار

ومنه **h ق.ش في 0 على اليسار**

لدينا: $h'(x) = 3x^2+3$

اذا: $h'_g(0) = 3$

التأويل الهندسي: $(\mathcal{C}_h)$ يقبل نصف مماس في النقطة ذات الأفصول $x_0 = 0$ معادلته:
$$\begin{cases} y = h'_g(0)(x-0) + h(0) \\ x \leq 0 \end{cases}$$

أي أن:
$$\begin{cases} y = 3x \\ x \leq 0 \end{cases}$$

8-ج) h غير ق.ش في 0.

التعليل: $\forall x > 0 : \ h(x) = f(x)$

f غير ق.ش في 0 (حسب سؤال 3-ع) على اليمين. اذا: h كذلك.

ومنه h غير ق.ش في 0.

* * *

6-أ) حسب جدول تغيرات f

القيمة الدنيا ل f على $]0,+\infty[$ هي $f(1) = -2$.

6-ب) الاستنتاج:

بما أن: -2 قيمة دنيا ل f على $]0,+\infty[$

فإنه لكل x من $]0,+\infty[$ لدينا:
$$f(x) \geq -2 \Rightarrow 2x\ln(x) - 2x \geq -2$$
$$\Rightarrow 2x\ln(x) \geq 2x - 2$$
$$\Rightarrow \ln(x) \geq \frac{2x-2}{2x} \quad (x>0 \text{ لأن})$$
$$\Rightarrow \ln(x) \geq \frac{2(x-1)}{2x}$$

اذن:
$$(\forall x \in]0,+\infty[) \quad \ln(x) \geq \frac{x-1}{x}$$

7) لتكن g قصور f على $[1,+\infty[$.

7-أ) g متصلة على $[1,+\infty[$.

و g تزايدية قطعا على $[1,+\infty[$.

اذن g تقبل دالة عكسية g^{-1}.

g^{-1} معرفة على المجال:
$$J = g([1+\infty[) = f([1+\infty[)$$
$$= [f(1); \lim_{x\to+\infty} f(x)[$$
$$= [-2,+\infty[$$

7-ب) إنشاء منحنى g^{-1}.

أنظر الشكل السابق:

$(\mathcal{C})$ و $(\mathcal{C}_{g^{-1}})$ متماثلان بالنسبة للمنصف الأول للمعلم:
$$(\Delta) : y = x$$

ملاحظة:

$(1,-2) \in (\mathcal{C}) \Rightarrow (-2,1) \in (\mathcal{C}_{g^{-1}})$

$(e,0) \in (\mathcal{C}) \Rightarrow (0,e) \in (\mathcal{C}_{g^{-1}})$

$D_{g^{-1}} = [-2;+\infty[$